Міністерство освіти, науки молоді і спорту України
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка

Збірник завдань обласних учнівських олімпіад з математики

Суми
2012

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
З 41

Збірник задач рекомендовано до друку рішенням редакційно-видавничої ради Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка

Укладачі: ***Синько Л.С.*** – старший викладач кафедри методики початкової та природничо-математичної освіти Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти
Лукашова Т.Д. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка;

Рецензент: ***Одінцова О.О.*** **–** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка

З 41 **Збірник завдань обласних учнівських олімпіад з математики/** Укладачі: Л.С. Синько, Т.Д. Лукашова. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2012. – 64 с.

У збірник включено завдання Сумських обласних учнівських олімпіад з математики, що пропонувалися у період з 1998 по 2011 р.
Збірник призначений для учнів, викладачів та вчителів математики, керівників гуртків, студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, а також для всіх, хто цікавиться математикою.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

© СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2012

ЗМІСТ

Передмова

Упродовж останніх десятиліть одним із засобів розвитку математичної творчості учнів та ефективним способом відбору математично здібної молоді є учнівські олімпіади з математики. Математичні олімпіади проводяться на Україні у декілька етапів: шкільні, районні (міські), обласні та заключні, в яких беруть участь переможці обласних турів олімпіади.

Завдання, що пропонуються на математичних олімпіадах різних рівнів носять, як правило, нестандартний характер і потребують від учнів не лише ґрунтовних знань програмового матеріалу, а й винахідливості та творчого підходу. Зазвичай вони ілюструють у спрощеній формі ту чи іншу глибоку математичну ідею.

Мета цієї книги – ознайомити учнів та вчителів із завданнями, що пропонувались на Сумських обласних олімпіадах з математики у період з 1998 по 2011 років. У посібнику вміщено близько 400 таких задач.

За надані матеріали укладачі висловлюють окрему подяку старшому викладачу кафедри методики початкової та природничо-математичної освіти Іщенко Т.Д. та доценту кафедри інноваційних технологій Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти Рабець К.В.

Укладачі сподіваються, що збірник задач буде корисним учням, викладачам та вчителям математики, керівникам гуртків, студентам фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, а також усім, хто цікавиться математикою.

Завдання для 7 класу

1. Розмістити у порожніх клітинках цілі числа так, щоб сума чисел у будь-яких трьох сусідніх клітинках дорівнювала 99.

34								32							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

(під клітинками підписано їх порядкові номери).

2. Чи можна розділити 13 аркушів паперу між шістьма учнями так, щоб при цьому кожен аркуш виявився розрізаним не більш як на три частини (або зовсім не розрізався) та кожній учень отримав одну й ту ж кількість шматочків паперу.

3. Зобразити на координатній площині множину точок (x, y) таких, що

$$\begin{cases} |x-y| = x+y, \\ |x+y| = x-y \end{cases}.$$

4. Знайдіть найбільше значення *n*, для якого число

$$3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot \ldots \cdot \underbrace{33\ldots3}_{55}$$

ділиться на 3^n.

5. Відстань між пунктами A та B – 80 км, між B та C – 300 км, між C та D – 120 км, між D та A – 100 км. Яка відстань між A і C?

6. За допомогою якої найменшої кількості доданків, що містять у своєму записі лише цифру 3, можна отримати у сумі число 111111?

7. Один годинник іде правильно, другий відстає на 1 хв. за добу, третій – поспішає на 1 хв. за добу. Через який строк після того, як годинники показували один і той же час, вони знову покажуть один і той же час?

8. Чи може число, записане за допомогою довільної кількості нулів та 30 одиниць, бути квадратом цілого числа?

9. У таблиці розміщено білі та чорні шашки. За один хід дозволяється пересувати дві довільні шашки одного кольору вздовж вертикалей або вздовж горизонталей в одному або у протилежному напрямках на одну клітинку. Чи можна за скінченне число ходів:

а) з таблиці 1 отримати таблицю 2;

○			●
	○	●	
	●	○	
●			○

таблиця 1

●			○
●			○
●			○
●			○

таблиця 2

б) з таблиці 3 зробити таблицю 4?

○					●
	○			●	
		○	●		
		●	○		
	●			○	
●					○

таблиця 3

○					●
○					●
○					●
○					●
○					●
○					●

таблиця 4

10. Чи можна числа 1, 2, 3, …, 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел у групах були рівними? Чи можна здійснити цю процедуру для чисел 1, 2, 3, …, 999?

11. Знайдіть кількість цілих чисел, які менші за 1000 і не діляться ні на 3, ні на 5, ні на 7.

12. Коли верблюд Дезіре спраглий, 84% його маси становить вода. Після того, як він нап'ється, його маса збільшується до 800 кг, а вода становить 85% від загальної маси. Якою є маса Дезіре, коли він спраглий?

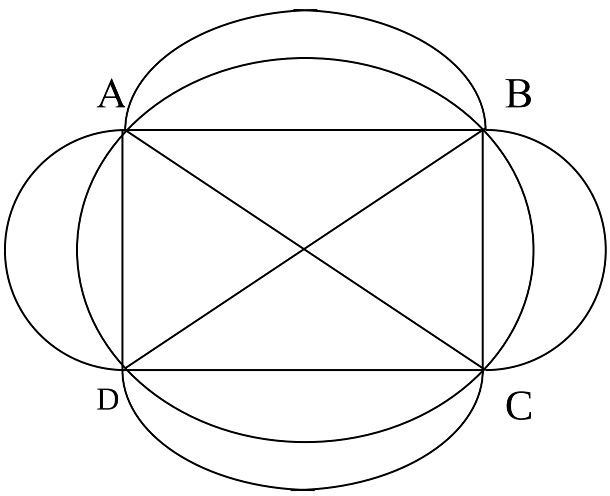
13. Скільки існує двозначних чисел, в яких цифра десятків менша, ніж цифра одиниць?

14. 5 яблук, 5 груш та 1 апельсин коштують 78 копійок. Одне яблуко, 5 груш та 5 апельсинів – 1 гривню 18 копійок. Скільки коштує одна груша, якщо усі фрукти однакові за вагою.

15. В гострокутному трикутнику з однієї вершини проведено висоту, з другої медіану, а з третьої – бісектрису. У результаті їх перетину утворюється новий трикутник. Доведіть, що він не може бути правильним.

16. На суді як речовий доказ представлено 14 монет. Експерт виявив, що монети з 1 по 7 – фальшиві, а з 8 по 14 – справжні. Суд знає лише те, що фальшиві монети мають однакову вагу, і вони легші за справжні. У розпорядженні є лише шалькові терези без гир. Як за допомогою трьох зважувань доведіть суду, що монети з 1 по 7 фальшиві, а з 8 по 14 – справжні.

17. Навколо прямокутника $ABCD$, в якому AB=4 см, BC=3см, AC= 5 см описано коло, а на його сторонах побудовано півкола (див. рисунок). Доведіть, що площа заштрихованих «серпиків» не менша за площу прямокутника $ABCD$.



18. Аркуш паперу розрізали на чотири частини. Потім кожен листочок – ще на чотири і т.д. Чи можна таким чином отримати 50 листочків? 2002 листочки? Відповідь пояснити.

19. Деякі з 11 коробок містять по 8 менших коробок. Деякі з менших коробок також містять по 8 менших коробок. Відомо, що порожніх коробок 102. Скільки усіх коробок?

20. У таксі їдуть п'ятеро пасажирів. Доведіть, що серед них знайдуться принаймні двоє, що мають однакову кількість знайомих серед цих п'яти.

21. У вершинах трикутника записано три числа. Відомо, що суми двох сусідніх чисел дорівнюють 2003, 2004 та 2005. Знайдіть ці числа.

22. Знайдіть усі трьохзначні числа, які діляться на 11 і в яких сума цифр дорівнює 25.

23. На дошці записано 19 цілих чисел. Відомо, що квадрат їх суми дорівнює сумі їх квадратів. Доведіть, що хоча б одне з цих чисел буде парним.

24. Заєць біжить попереду вовка і знаходиться від нього на відстані 60 заячих стрибків. Три стрибки вовка дорівнюють 7 стрибкам зайця. За один і той же час вовк робить 6 стрибків, а заєць – 9. Через скільки трибків вовк наздожене зайця.

25. Два жука, один з яких рухається у 3 рази швидше, ніж другий, рухаються від центра годинника по годинниковій та хвилинній стрілках відповідно. Відомо, що кожен з них проповзає свою стрілку за час повного оберту іншої. У скільки разів годинна стрілка коротша за хвилинну?

26. У залі знаходяться 20 чоловік. Доведіть, що серед них знайдуться принаймні двоє, що мають однакову кількість знайомих серед присутніх (вважаємо, що коли А знайомий з В, то В знайомий з А; ніхто не знайомий з самим собою).

27. Якщо рибалка буде пливти моторним човном за течією, то пального вистачить на 30 км, а якщо проти – на 20 км. На яку найбільшу відстань він може відпливти від берега за течією, щоб пального вистачило на дорогу назад?

28. На прямій взяли кілька точок. Між кожними сусідніми точками вставили ще по одній і повторили так кілька разів. Чи можна після таких дій отримати 2002, 2003 точки?

29. З книги випав шматок, перша сторінка якого має номер 387. Номер останньої сторінки складається з тих же цифр, але записаних у іншому порядку. Скільки сторінок випало з книги?

30. Знайдіть дві останні цифри числа 2^{2002}.

31. Чисельник дробу збільшили на 2, а знаменник – на 2002. Чи може дріб в результаті цього збільшитися?

32. На чарівній яблуні виросло 15 бананів та 20 апельсинів. Якщо зірвати один плід, то на його місці одразу виросте такий самий. Якщо зірвати два однакових плода, виросте апельсин, а якщо одночасно зірвати два різні плоди – виросте банан. У якому порядку слід зривати плоди, щоб на яблуні залишився рівно один плід? Чи можна передбачити, що то буде за фрукт? Чи можна зірвати плоди так, щоб на яблуні не лишилося жодного плоду?

33. Число, що складається з 2002 цифр, має цікаву властивість: кожне двоцифрове число, утворене сусідніми цифрами, кратне або 17, або 23. Остання цифра числа – 1. Якою є його перша цифра?

34. Знайдіть хоча б одне натуральне число, сума дільників якого дорівнює 2002.

35. Дано число 517**. Які цифри слід поставити замість зірочок, щоб отримане число ділилось і на 6, і на 7, і на 9?

36. Коник стрибає вздовж прямої, причому кожен непарний стрибок він робить довжиною 1 см, а кожний парний – довжиною 2 см вліво, або вправо. На якій найближчій відстані від початкової точки він зможе опинитися після 2003 стрибка?

37. Ціна квитка у театр становить 15 грн. Коли ціну знизили, кількість глядачів збільшила на 25 %, а збори зросли на 15 %. На скільки гривень було знижено ціну квитка?

38. Доведіть тотожність:

$$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d).$$

39. Знайдіть усі натуральні значення *n*, для яких дріб $\frac{11n+8}{7n+3}$ можна скоротити.

40. Доведіть, що серед шести цілих чисел завжди знайдуться два числа, різниця яких ділиться на 5.

41. Скількома способами з відрізків 1 см, 19 см та 98 см можна скласти відрізок довжиною 1 м?

42. У Бразилії дуже багато диких мавп. Кожен рік, 2 січня, роблять перепис усіх мавп. У 1999 р. їх кількість збільшилась на 5% у порівнянні з 1998 р. Упродовж 200-2003 рр. приріст мавп щорічно становив 5%, причому за даними 2003 р. у країні проживало не більше 5 000 000 диких мавп. Скільки мавп проживало у Бразилії на 2 січня 2003 р.?

43. Знайдіть такі прості числа p і q, щоб числа $7p+q$ та $pq+11$ теж були простими.

44. В озері водяться карасі, окуні та щуки. Два рибалки спіймали разом 70 рибин, причому $\frac{5}{9}$ улову першого рибалки складали карасі, а $\frac{7}{17}$ улову другого – окуні. Скільки щук спіймав кожен з рибалок, якщо обидва спіймали порівну карасів і окунів.

45. Замінити зірочки знаками арифметичних дій та знайдіть натуральне число А, якщо 83∗А∗97=8794.

46. В одній родині було багато дітей. Семеро з них любили капусту, шестеро – моркву, п’ятеро – горох. Четверо дітей любили і капусту, і моркву, троє – і капусту, й горох, двох – моркву й горох, а один – і капусту, і моркву, й горох. Скільки дітей було у родині, якщо кожен з них любить щось із зазначеного вище?

47. Пасажир метро спускається по рухомому ескалатору за 24 секунди, а по нерухомому – за 42 секунди. За скільки секунд пасажир спуститься вниз, стоячи на рухомому ескалаторі?

48. Доведіть, що для всіх цілих m число $\frac{m^3+11m}{6}$ також є цілим.

49. Яке з чисел більше:

$$A=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100} \text{ чи } B=\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{102}?$$

50. Мандрівник їхав автобусом і побачив на кілометровому стовпі двоцифрове число. Він заснув, а коли прокинувся через годину, побачив, що на кілометровому стовпі написано трицифрове число, перша цифра якого така ж сама, як друга годину тому, друга – 0, а третя – така як перша годину тому. Ще через дві години він виглянув у вікно і побачив на стовпі трицифрове число, яке мало такі ж крайні цифри, але 0 змінився на іншу цифру. Знайдіть швидкість автобуса.

51. Розв’яжіть рівняння:

$$\left\|5|x|-\frac{3}{5}\right|-\frac{2}{5}\right|=\frac{3}{5}.$$

52. Миколка та Сергій грають у гру, по черзі записуючи цілі числа у клітинки таблиці розміром 7×9 (7 рядків та 9 стовпців). Першим робить хід Миколка. За один хід можна записати одне число у вільну клітинку. Гра продовжується, доки не заповниться уся таблиця. Потім підраховуються суми чисел S_1, S_2,… S_7 у рядках таблиці. Якщо серед них парних чисел більше, ніж непарних, то виграє Миколка, у іншому випадку – Сергій. Чи може хтось із гравців забезпечити собі виграш?

53. З пункту *A* у пункт *B* одночасно виїхали два велосипедисти. Перший з них половину часу, який він витратив на проходження всього шляху, їхав зі швидкістю 25 км/год, а решту часу – зі швидкістю 20 км/год. Другий першу половину шляху їхав зі швидкістю 20 км/год, а другу половину – зі швидкістю 25 км/год. Хто з них прибув у пункт *B* раніше?

54. Скількома способами можна розміняти 20 гривень купюрами меншого номіналу (1 грн., 2 грн., 5 грн., 10 грн.)?

55. У трикутниках ABC та $A_1B_1C_1$ проведено медіани BM та $B1M1$ відповідно. Відомо, що $BM=B_1M_1$, $\angle AMB=\angle A_1M_1B_1$, $MC=M_1C_1$. Доведіть, що $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

56. На дошці написано 19 цілих чисел. Відомо, що квадрат їх суми дорівнює сумі їх квадратів. Доведіть, що хоча б одне з цих чисел буде парним.

57. Кожен з трьох друзів зіграв однакову кількість шахових партій з іншими. При цьому з'ясувалось, що перший з них виграв найбільшу кількість партій, другий програв найменшу кількість партій, а третій – дістав найбільшу кількість очок. Чи можлива така ситуація? Якщо ні, доведіть це, якщо так, обґрунтуйте відповідь, навівши приклад.

58. Уздовж алеї, яка простягається від воріт до будівлі школи, стоять 20 стовпчиків, кожен з яких має висоту або 20 см, або 30 см, або 40 см. Семикласник, пройшовши алеєю від школи до воріт, нарахував 11 стовпчиків, кожен з яких був нижчим від наступного за ним. Доведіть, що на зворотному шляху він нарахує не менше 5 таких стовпчиків.

59. У запису прикладу на множення чисел, різним літерам відповідають різні цифри, зірочкам можуть відповідати які завгодно цифри. Відновіть приклад:

```
            × A B C D E F
              * * * * * *
              -----------
              C * * * * B
            E * * * * D
          B * * * * A
        D * * * * C
      A * * * * F
    F * * * * E
    -----------
  * * * * * * * * * * *
```

60. Мавпочки Чі-Чі та Ко-Ко розірвали газету, причому Чі-Чі рвала кожен шматок на три частини, а Ко-Ко – на 5 частин. Коли господар спробував зібрати газету, у нього виявилось 2008 клаптиків паперу. З’ясуйте, чи всі шматочки газети зібрані.

61. Чи можна квадрат зі стороною 1 м розрізати на 7 прямокутників (необов’язково однакових), кожен з яких мав би периметр 2 м?

62. Для натурального числа n через $S(n)$ та $P(n)$ позначено суму й добуток його цифр. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких справджується рівність

$$S(n)+P(n)=n.$$

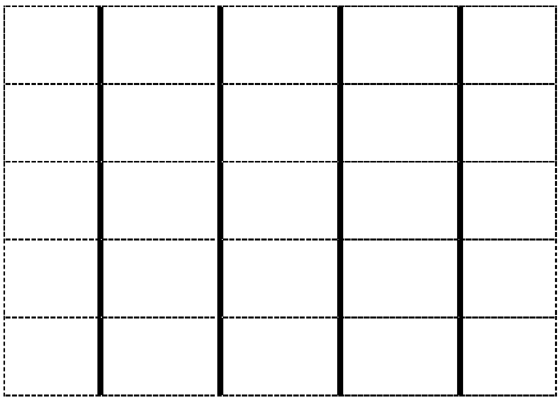
63. Із селища A у селище B виїхав велосипедист, а за 15 хв. Слідом за ним виїхав автомобіль (велосипедист та автомобіль рухаються зі сталими швидкостями). На середині шляху від A до B автомобіль наздогнав велосипедиста. Колт автомобіль прибув до селища B, велосипедисту залишилось проїхати третину шляху. За який час велосипедист подолав відстань від A до B?

64. Доведіть, що значення виразу $2001\cdot 2003\cdot 2007\cdot 2009+36$ є квадратом натурального числа.

65. Розіграш лото проводиться вибором 5 різних кіль зі 100 куль, які пронумеровані наступним чином: 00, 01, 02,…, 99. У черговому розіграші послідовно випали 5 куль, чиї номери розташовані у порядку зростання, і в цих п'яти номерах були використані усі 10 цифр. Який найбільший номер при цьому може мати середня з п'яти куль цього розіграшу?

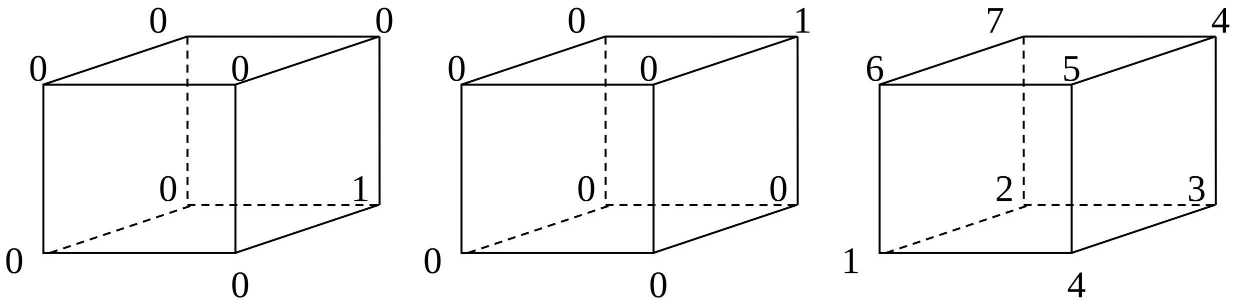
66. У десятизначному числі $N = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{10}}$ цифра a_1 збігається з кількістю одиниць у записі N, a_2 – з кількістю двійок, a_3 – з кількістю 3, …, a_{10} – з кількістю нулів. Знайдіть N.

67. Земельну ділянку квадратної форми площею 25 м^2 потрібно розділити на 5 «клітчастих» ділянок однакової площі, використовуючи шматки металевого дроту. На рисунку показано, як це зробити, використовуючи 20 м дроту. А чи вистачить для виконання завдання 16 м дроту? (Кожна «клітчаста» ділянка має складатися лише з цілих клітинок).



68. У Буратіно було кілька монет ґатунком 15 та 20 сольдо, причому монет у 20 сольдо було більше ніж монет у 15 сольдо. П'яту частину усіх грошей Буратіно витратив на білети до театру ляльок, віддавши дві монети. Половину решти грошей він віддав за обід у таверні «Три піскарі», витративши три монети. Скільки монет кожного ґатунку було у Буратіно спочатку?

69. Біля кожної вершини куба написано число. За один крок до двох чисел, розташованих на одному ребрі, додають по одиниці. Чи можна за кілька таких кроків зробити усі вісім чисел однаковими, якщо спочатку були написані числа, як показано на рисунках?



а) б) в)

70. Зобразити на координатній площині множину точок (x, y), для яких

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 = \frac{x^3+y^3}{2}.$$

71. У давньогрецькому папірусі серед різних повідомлень є розклад дробу у суму дробів з чисельниками 1: $\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}$. Один із знаменників замінено на x. Знайдіть цей знаменник.

72. Великий оркестр демонстрував своє мистецтво на площі. Спочатку музиканти вишикувалися у шеренги у формі квадрата, потім – у формі прямокутника, причому кількість шеренг збільшилася на 5. Скільки музикантів було у оркестрі?

73. Доведіть, що число $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ ділиться на 3 при будь-якому цілому додатному n.

74. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується цифрою 6 і збільшується в 4 рази, якщо його останню цифру поставити на перше місце.

75. Побудуйте графік функції:

$$y=\frac{\left(-2^2\right)^3\cdot\left(\left(-5\right)^3\right)^2}{10^6}\cdot|x|+\left(1\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)^2.$$

76. Коробка містить 12 червоних та 16 білих куль. Дозволяється виконувати у довільному порядку наступні дії:

а) додавати 2 червоні кулі, видаливши 1 білу;

б) додавати 1 червону кулю й 2 білі кулі;

в) вилучати 2 червоні кулі, додавши 1 білу;

г) вилучати 1 червону й 2 білі кулі.

Чи може після виконання певної кількості таких дій у коробці виявитись 46 червоних та 55 білих куль?

77. Двоє гравців по черзі фарбують рядки та стовпчики квадратної таблиці 6×6: перший зафарбовує жовтим, а другий – блакитним кольором. Фарбувати раніше зафарбований рядок чи стовпчик не можна. Оскільки у таблиці 6 рядків та 6 стовпчиків, то кожен зробить рівно 6 ходів. Наприкінці гри, якщо у таблиці виявиться більше зелених клітин, ніж клітин інших кольорів, перемагає перший, якщо зелених менше – перемагає другий. Якщо клітин зеленого кольору стільки ж, скільки й інших – гра закінчується нічиєю. Хто переможе у цій грі? (Клітина матиме зелений колір, якщо вона пофарбована одночасно у жовтий та синій кольори).

78. Чи можна у виразі $1 * 2 * 3 * \ldots * 2010 = 2 * 0 * 1 * 1$

кожен знак «*» замінити знаками «+» або «–», щоб одержати правильну рівність?

79. Чисельність мешканців міста Суми за 2008 рік збільшилась на 8%, а протягом двох наступних років щорічно зменшувалась на 5% й на початок 2011 року становила 272 916 мешканців. Якою була чисельність населення міста на початку 2008 року?

80. Скільки існує неправильних дробів, більших за $\frac{2011}{2010}$, чисельник яких більший від знаменника на 1?

81. Доведіть, що перші 16 натуральних чисел можна записати у рядок, але не можна записати по колу так, щоб сума будь-яких двох сусідніх чисел не була точним квадратом.

82. Якщо кожний хлопчик купить пиріжок, а кожна дівчинка – тістечко, то разом вони витратять на 1 грн. менше, ніж якби кожний хлопчик купив тістечко, а кожна дівчинка – пиріжок. Ціна пиріжка і тістечка відрізняються більше, ніж на 50 коп. Відомо також, що хлопчиків більше, ніж дівчаток. Визначити, на скільки хлопчиків більше, та з'ясувати, що дорожче: пиріжок, чи тістечко?

83. Відмітьте на площині 6 точок так, щоб на однаковій відстані від кожної з них знаходились відмічені три точки.

Завдання для 8 класу

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2}\right)}{2x^2}=1999.$$

2. Розв’яжіть рівняння:

$$\left||x|-2\right|=x.$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}|xy|+1=|x|+|y|,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

4. Вкажіть на координатній площині хОу множину усіх точок $M(x,y)$, координати яких задовольняють рівняння:

$$|y|=\frac{|x|\cdot x-|x|}{x}.$$

5. Знайдіть усі пари дійсних чисел (x,y), для яких виконується рівність:

$$\frac{x-2}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{4-y}{x}-\frac{|y-2x|}{xy}.$$

6. Знайдіть усі пари (x,y) дійсних чисел, що задовольняють рівняння:

$$x^4-2x^2y+3y^2-4xy+4x^2-8y+16=0.$$

7. Графіки функцій $y=-(2k+3)x-1-2k$ та $y=kx+k+2$, де $k>0$, перетинають вісь ординат у точка *A* та *B* відповідно. Точку перетину цих графіків позначено буквою *M*. Чи можна, витерши вісі координат і графіки, відновити систему координат за точками *A*, *B* і *M*?

8. Чи існують цілі числа *m* та *n* такі, що

$$(m+1998)(m+1999)+(m+1999)(m+2000)+(m+1998)(m+2000)=n^2?$$

9. Чи існують цілі числа k і l такі, що

$$k^3 + l^3 = 2001?$$

10. Знайдіть усі пари натуральних чисел, які задовольняють рівняння:

$$19m + 84n = 1984.$$

11. Знайдіть усі пари цілих додатних чисел (x, y), які задовольняють рівняння $x + y = xy$. Знайдіть усі трійки цілих додатних чисел (x, y, z), які задовольняють рівняння:

$$x + y + z = xyz.$$

12. Цілі числа m та n такі, що $m^2 + 9mn + n^2$ ділиться на 11. Доведіть, що у цьому випадку різниця $m^2 - n^2$ також ділиться на 11.

13. Розв'яжіть рівняння у натуральних числах

$$\frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d} = \frac{164}{37}.$$

14. Розв'яжіть рівняння в цілих числах:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = -14.$$

15. Доведіть, що число $n^3 + 3n^2 - n - 3$ ділиться на 48 при будь-якому непарному натуральному n.

16. Знайдіть усі цілі числа x та y, що є розв'язками рівняння:

$$x^2 - 4y^2 = 1997.$$

17. Зайдіть усі пари цілих чисел (x, y), що задовольняють рівняння:

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

18. Розв'яжіть у натуральних числах:

$$mn - n + m = 2007.$$

19. Число, яке складається з 2002 цифр має цікаву властивість: будь-яке двоцифрове число, утворене сусідніми цифрами, кратне або 17, або 23. Відомо, що остання цифра числа 1. Якою є його перша цифра?

20. По колу записано 2002 числа, кожне з яких дорівнює сумі своїх сусідів зліва та справа. Знайдіть суму цих чисел.

21. Ціле число a має властивість: число $3a$ можна подати у вигляді x^2+3y^2, де x та y цілі числа. Доведіть, що й число a можна подати у тому ж вигляді.

22. Знайдіть суму усіх чисел від 1 до 100, у записі яких немає цифр 4 і 5.

23. Не користуючись калькулятором, знайдіть пропущені цифри x, y, z у рівності:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 39 = 2039788208\,1197443358\,6402817399\,0289735xyz0000000$$

24. Обчисліть:

$$19961996\cdot 199719971997 - 19971997\cdot 199619961996.$$

25. Доведіть, що число $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ є цілим.

26. Чи є число $2011^{2010^{2009}}$ повним квадратом?

27. Знайдіть добуток $mnlk$ натуральних чисел m, n, l, k, якщо $m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{l}}}=\dfrac{2251}{172}$.

28. Знайдіть останню цифру числа

$$1998^{1996}+1999^{1997}+2002^{2000}+2003^{2001}.$$

29. У вершинах п'ятикутника записано 5 чисел. Відомо, що сума будь-яких двох сусідніх не більша 10. Чи може значення суми всіх записаних чисел дорівнювати 30?

30. Відомо, що довжини сторін прямокутника та його діагоналей є цілими числами. Доведіть, що площа прямокутника – ціле число, кратне 12.

31. У двох коробках лежать горіхи. Якщо з першої перекласти у другу 100 горіхів, то у другій буде горіхів удвічі більше, ніж у першій. Якщо, навпаки, з другої перекласти у першу кілька горіхів, то у першій буде у 6 разів більше, ніж у другій. Яким є найменше можливе число горіхів у першій коробці? Скільки у цьому випадку буде горіхів у другій коробці?

32. Знайдіть усі натуральні числа, більші за 1, на які при різних цілих k можна скоротити дріб $\frac{5k+6}{8k+7}$.

33. Доведіть нерівність

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e), \quad a,b,c,d,e \in R.$$

34. Доведіть нерівність

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{2001^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

35. Доведіть, що за умови $(a+b+c)c > 0$ має місце нерівність $b^2 > 4ac$.

36. Дано 1999 чисел. Відомо, що сума будь-яких 99 з них є додатним числом. Доведіть, що сума усіх цих чисел – додатне число.

37. Порівняйте числа

$$\sqrt{2007}+\sqrt{2005} \text{ і } 2\sqrt{2006}.$$

38. Чи можуть одночасно бути раціональними числа

$$\left(x-\sqrt{3}\right) \text{ та } \left(x^3+\sqrt{3}\right),$$

де x – деяке дійсне число?

39. Нехай $A = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)a + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)b$ і $B = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)a + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)b$

Доведіть, що $A^2 - B^2 = a^2 - b^2$.

40. Обчисліть суму $\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}$, якщо відомо, що $xyz = 1$.

41. Про одне й теж саме число було зроблено такі заяви:

(А) воно є точним квадратом, воно двоцифрове;

(Б) у ньому більше трьох цифр, дві його цифри однакові;

(В) воно просте, сума його цифр дорівнює 4;

(Г) воно ділиться на суму своїх цифр без остачі, воно дорівнює добутку своїх цифр.

Відомо, що у кожній заяві правильна лише одна частина з двох. Про яке число йдеться?

42. *Дано трапецію ABCD* з основами *AD* та *BC*. Відомо, що бісектриса кута $\angle ABC$ перетинає середню лінію трапеції в точці *P*, а основу *AD* – в точці *Q*. Знайдіть величину кута $\angle APQ$.

43. На сторонах *AB, BC*, *CD* та *DA* квадрата *ABCD* вибрали точки *M, P, N, Q* так, що відрізки *MN* і *PQ* перпендикулярні. Нехай *O* – точка перетину відрізків *MN* і *PQ*. Доведіть, що $P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{BMOP} + P_{DNOQ}$, де P_F позначає периметр фігури F.

44. На основі *AC* рівнобедреного трикутника *ABC* (*AB*=*BC*) позначили дві точки *F* і *E*, а на бічних сторонах *AB* і *BC* – точки *D* і *G* відповідно так, що *AD*+*AE*=*AC* і *CF*+*CG*=*AC*. Знайдіть кути між прямими *DF* і *EG*, якщо $\angle ABC=70^0$.

45. Задано трикутник, довжини сторін якого рівні a, b, c. Відомо, що $\frac{b}{a+c} = \frac{a}{b+c}$. Визначити кути цього трикутника, якщо один з них дорівнює 80^0.

46. В опуклому чотирикутнику *ABCD* відрізки, що сполучають середини протилежних сторін рівні. Знайдіть площу даного чотирикутника, якщо *AC* = 2 см, *BD* = 1 см.

47. Точка *D* лежить на стороні *BC* гострокутного трикутника *ABC* і є відмінною від його вершин. Трикутники *ABC*, *ABD, ADC* – рівнобедрені. Доведіть, що площа трикутника *ABD* не менша за площу трикутника *ADC.*

48. Є кілька квадратів, сума площ яких дорівнює 4. Доведіть, що такими квадратами можна покрити квадрат площею 1.

49. Прожектор освітлює кут 90^0. Доведіть, що у будь-яких чотирьох точках площини можна розмістити чотири прожектори і спрямувати їх так, щоб вони освітлювали всю площину.

50. Сталеву плитку трикутної форми зі сторонами 3,4 та 5 обвели олівцем. В отриманому трикутнику провести бісектриси, користуючись лише плиткою.

51. На лінійці нанесено шкалу з ціною поділу 1 см. За допомогою цієї лінійки проведіть пряму, яка перпендикулярна до даної прямої.

52. У трапеції *ABCD* кути при основі *A* дорівнюють: $\angle DAB = 120^0$, $\angle ABC = 150^0$. Основа *H* перпендикуляра, опущеного з вершини *A* на діагональ *BD,* розташована на середній лінії *MN* трапеції, причому точка *M* належить стороні *AD.* Знаючи довжину *AB* = *a*, знайдіть довжину основи *CD.*

53. Турист пройшов половину шляху між пунктами А та В зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до В – зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від В до А дві третини шляху він пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямку від А до В, а решту шляху пройшов зі швидкістю 5 км/год. знайдіть відстань між пунктами А і В, якщо відомо, що на зворотній шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на увесь шлях від А до В. (Середня швидкість дорівнює відношенню відстані від А до В до всього часу руху в напрямі від А до В).

54. З міст А та В одночасно на зустріч один одному виїхали велосипедист та мотоцикліст, які зустрілися о 14 годині. Якби велосипедист рухався у два рази швидше, вони б зустрілися о 13 годині 30 хвилин. Якби мотоцикліст рухався у два рази швидше, вони б зустрілися о 13 годині 12 хвилин. О котрій годині вони виїхали?

55. Пройшовши $\frac{3}{8}$ довжини мосту, віслючок Іа-Іа помітив позаду себе на дорозі автомобіль, який рухався зі швидкістю 60 км/год. Якщо віслючок побіжить назад, то він зустрінеться з автомобілем на початку мосту, якщо побіжить уперед, то автомобіль наздожене його у кінці мосту. З якою швидкістю бігає Іа-Іа?

56. За 9 однакових книжок заплатили більш, ніж 11 грн., але менше, ніж 12 грн. За 13 таких книжок заплатили 15 грн. і кілька копійок, але не більше 16 грн. Скільки коштує одна книга?

57. Песик Гав може з’їсти батон докторської ковбаси за 1 хвилину, а батон любительської – за 2 хвилини. Кошенятко Няв може з’їсти батон докторської ковбаси за 2 хвилини, а батон любительської – за 3 хвилини. Кожен батон ковбаси вони можуть їсти одночасно з протилежних боків. За який найменший час вони разом можуть з'їсти два батони ковбаси, один з яких докторська, а інший – любительська?

58. У вихідний день сім'я зібралась на кухні поласувати млинцями. Мама з донькою їх смажать, а тато з сином – з'їдають. На смаження 100 млинців мама витрачає 30 хвилин, а Оленка – 40 хвилин. Тато з Андрійком з'їдають 100 млинців за годину. За який час від початку процесу на столі виявиться рівно 100 млинців?

59. Якщо рибалка буде пливти моторним човном за течією, то пального вистачить на 30 км, а якщо проти – на 20 км. На яку найбільшу відстань він може відпливти від берега за течією, щоб пального вистачило на дорогу назад?

60. Після сьомого прання шматок мила за всіма розмірами зменшився удвічі. Скільки разів ще можна використовувати цей шматок мила. Вважати, що витрата мила на кожне прання однакова.

61. На дошці записано натуральні числа від 1 до 97. Сашко та Ігор по черзі закреслюють два числа. Сашко починає першим і замінює два числа їх сумою, а Ігор – другим, замінюючи два числа модулем їх різниці. Гра закінчується, коли на дошці залишається одне число. Яке найменше число може залишитись на дошці?

62. Дано одну купку з 2001 сірника. Двоє грають в наступну гру. По черзі вони роблять такі ходи: вибирається довільна купка, що містить більш одного сірника і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купка не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві, записується добуток чисел сірників в отриманих нових купах. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилась на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

63. У саду діда Панаса ростуть груші та яблуні таким чином, що для кожної яблуні обов'язково знайдуться дві груші на відстані рівно 10 м від неї. Чи може яблунь у садку бути більше, ніж груш?

64. З квадратної дошки 5×5 вирізали одну клітинку. Відомо, що решту дошки можна замостити плитками 1×3. Визначити розміри вирізаної клітинки.

65. На чарівній яблуні виросло 15 яблук та 20 апельсинів. Якщо зірвати один плід, на його місці виростає такий самий. Якщо зірвати два однакових плоди, виросте апельсин, а якщо одночасно зірвати два різні плоди – виросте яблуко. У якому порядку слід зривати плоди, щоб на яблуні залишився рівно один плід? Чи можна передбачити, що це буде за фрукт? Чи можна зірвати плоди так, щоб на дереві не залишилося жодного плоду?

66. Є кілька (не менше двох) чисел, відмінних від нуля. Дозволяється витерти будь-які два числа a, b і записати замість них числа $a+\frac{b}{2}$, $b-\frac{a}{2}$. Доведіть, що після кількох операцій неможливо дістати початковий набір чисел.

67. Нехай m і n – натуральні числа, A – операція, що переводить дріб $\frac{m}{n}$ у дріб $\frac{m^2+2}{n^2+1}$ (тобто $A\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m^2+2}{n^2+1}$). Доведіть, що застосувавши A-операцію до дробу $\frac{m}{n}$, потім до отриманого результату і т.д., після скінченного числа A-операцій буде отримано скоротний дріб.

68. У таблиці 6×6 чотири мінуси стоять на перетині третього і четвертого стовпчиків з третім і шостим рядками, а в решті клітинок стоять плюси. Дозволяється міняти знак одночасно у всіх клітинках, розміщених в одному рядку, одному стовпчику, або вздовж прямої, паралельної одній з діагоналей таблиці (зокрема, у будь-якій кутовій клітинці). Чи можна за допомогою таких операцій отримати таблицю, де не буде жодного мінуса?

69. Чи можна розфарбувати деякі клітинки дошки 8×8 так, щоб у будь-якому квадраті 3×3 було рівно 5 зафарбованих клітинок, а у кожному прямокутнику 2×4 (вертикальному чи горизонтальному) – рівно 4 зафарбовані клітинки?

70. Дно прямокутної коробки замощене плитками розміром 2×2 та 1×4. Плитки висипали й загубили одну розміром 2×2. Натомість роздобули плитку розміру 1×4. Чи можна тепер вимостити дно коробки цими плитками?

71. Круглий торт масою 1 кг розрізали на частини трьома прямолінійними розрізами. Відомо, що два з них проходять через центр, а третій не проходить. Доведіть, що маса принаймні однієї частинки становить не менше $\frac{1}{6}$ кг.

72. Незнайко написав на дошці кілька різних натуральних чисел і поділив в умі їх суму на добуток. Потім він стер найменше число і знову розділив суму чисел. Що залишились на їх добуток. Другий результат вийшов удвічі більшим за перший. Яке число витер Незнайко?

73. У мішку лежить 101 цукерка. Малюк і Карлсон по черзі беруть з мішка від 1 до 10 цукерок. Коли всі цукерки розібрані, вони підраховують кількість цукерок у кожного. Якщо ці два числа взаємно прості – виграє Малюк, якщо ні – виграє Карлсон. Хто виграє у цій грі і як він має для цього грати?

74. На колі довжиною 101 см відмітили 101 точку. Відмічені точки ділять коло на рівні дуги (1 см кожна). Василько поставив на одну з цих точок фішку і почав рухати її за таким правилом: за один хід можна перемістити фішку за годинниковою стрілкою на 6, 7, 8, 9 чи 10 см (відстань вимірюється по колу). При цьому фішка має виявитись у відміченій точці, в якій ще ні разу не була. Василько вже зробив 45 ходів. Доведіть, що він може зробити ще один хід.

75. На прямій зліва направо розташовані будинки П'ятачка (A), Вінні-Пуха (B), Сови (C) та Іа(I). На день народження одночасно зі своїх домівок вийшли П'ятачок з надувною кулькою, Вінні з горщиком меду та Сова у напрямі будинку Іа. П'ятачок дуже швидко біг, і на рівні будинку Вінні у нього лопнула кулька. Він повернувся додому, взяв іншу кульку і знову побіг до Іа. Напроти будинку Сови у нього знову лопнула кулька, і він знову повернувся додому і взяв третю кульку і знову побіг до Іа (тепер уже без пригод). Вінні йшов з горщиком меду і потроху його їв. Напроти будинку Сови мед закінчився, і Вінні повернувся додому, узяв новий горщик і знову попрямував до Іа. Сова йшла на день народження без зупинок і пригод. Виявилось, що усі вони прийшли в гості одночасно. Знаючи, що дім Сови знаходиться на відстані 1,5 км від дому Іа, і що П'ятачок бігає удвічі швидше за Вінні і утричі швидше за Сову, визначити, на якій відстані від будинку Іа розташовані будинки П'ятачка та Вінні-Пуха.

76. Серед учасників математичної олімпіади 80% синьоокі й 70% хлопці. Отже, більшість учасників – синьоокі хлопці. Чи є правильним це твердження?

77. Відношення двох мішаних дробів дорівнює відношенню їх цілих частин і дорівнює 3. Сума дробових частин цих чисел дорівнює оберненому відношенню цілих частин. Знайдіть найменшу пару таких чисел.

78. Сашко задував просте трьохзначне число, всі цифри якого різні. Яка цифра може бути останньою, якщо відомо, що вона є сумою двох перших?

79. У класі 25 учнів, 17 з яких уміють їздити на велосипеді, 13 вміють плавати, а 8 – ходити на лижах. Жоден з учнів не володіє усіма трьома видами спорту, але як велосипедисти, так і лижники і плавці мають гарні та задовільні оцінки з математики. Відомо також, що 6 учнів мають незадовільні оцінки з математики. Скільки плавців уміють ходити на лижах?

80. У кошику лежать 16 яблук. За одне зважування можна визначити сумарну масу будь-яких трьох яблук. Запропонуйте спосіб, як за 8 зважувань знайдіть загальну масу усіх яблук.

81. У даний момент сім'я складається із батька, матері і сина. Сума років усіх членів сім'ї дорівнює 65. Чотири роки тому батько був старший за сина у 9 разів. Дев'ять років тому сума років усіх членів сім'ї дорівнювала 40. Скільки років батьку?

82. З'єднайте попарно через одну вершини опуклого п'ятикутника і знайдіть суму внутрішніх кутів одержаної п'ятикутної зірочки.

83. Рівносторонній трикутник і квадрат вписані в коло одиничного радіуса так, що жодна вершина трикутника не є вершиною квадрата. Їхні вершини ділять коло на 7 дуг. Доведіть, що хоча б одна з них не більша за $\frac{\pi}{12}$.

Завдання для 9 класу

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)=\left(1+x+x^2+x^3\right)^2.$$

2. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x|x|+y|y|=1 \\ [x]+[y]=1 \end{cases},$$

(тут $[t]$ позначено найбільше ціле число, що не перевищує t).

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1-z \\ \dfrac{yz}{y+z}=2-x \\ \dfrac{zx}{z+x}=2-y \end{cases}.$$

4. Розв’яжіть рівняння:

$$(x-4)^4+(x+2)^4=2002.$$

5. Розв’яжіть рівняння:

$$x^4-2\sqrt{7}x^2+x+7-\sqrt{7}=0.$$

6. Розв’яжіть рівняння:

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a.$$

7. Скільки коренів має рівняння:

$$\sqrt{2009-2010x}+\sqrt{2011x-2010}=1?$$

8. Доведіть, що

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1$$

9. Доведіть, що число $\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}}$ не може бути цілим для жодного натурального числа *n*.

10. На координатній площині ХОУ побудуйте множину усіх точок М(*x*,*y*), координати яких задовольняють рівність:

$$\left||x|-|y|\right|>1.$$

11. На координатній площині ХОУ побудуйте множину усіх точок М(*x*,*y*), координати яких задовольняють рівність:

$$\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|=2.$$

12. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{\left|x^2+x-2\right|}{\sqrt{x^2-2x+1}}$.

13. Розв'яжіть систему рівнянь у натуральних числах:

$$\begin{cases} 2x^2+30y^2+3z^2+12xy+12yz=308, \\ 2x^2+6y^2-3z^2+12xy-12yz=92 \end{cases}$$

14. Розв'яжіть у цілих числах систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

15. Доведіть, що десятковий запис числа 1999^6 містить принаймні три однакові цифри.

16. У вершинах квадрата записано чотири невід'ємних числа. Відомо, що сума двох сусідніх чисел не більша 2. Знайдіть найбільше можливе значення суми будь-яких трьох чисел.

17. В деякому натуральному числі переставили цифри. Доведіть, що сума даного й отриманого числа не може дорівнювати $\underbrace{99....9}_{2001\ \text{цифра}}$.

18. Знайдіть усі натуральні числа, що закінчуються на 2008, які після викреслювання останніх чотирьох цифр зменшуються в ціле число разів.

19. Числа 2000, 2001, 2002, …, 2010 записані одне за одним у деякому порядку. Доведіть, що отримане 44-цифрове число має принаймні чотири різні натуральні дільники.

20. Доведіть, що число $\underbrace{11...1}_{1998}$ ділиться на 37.

21. Доведіть, що при довільному натуральному n число $2^{2^{2^n}}-3$ ділиться на 13.

22. Знайдіть усі трикутники, в яких сторони вимірюються цілими числами, а периметр дорівнює подвоєній площі.

23. Відомо, що число $\overline{abc}$ – просте (a, b, c – цифри). Доведіть, що число b^2-4ac не може бути повним квадратом.

24. Знайдіть усі трійки цілих чисел, для яких виконується рівність:

$$l^2+n^2+m^2-2l+4m-6n=-11.$$

25. Розв’яжіть у натуральних числах рівняння:

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}.$$

26. Розв’яжіть у цілих числах рівняння:

$$x^3+2y^3+4z^3=6xyz.$$

27. Чи існує таке натуральне число n, що

$$n+n^2+n^3+...+n^{2011}=(n+1)^{2010}\ ?$$

28. Доведіть, чи спростуйте наступне твердження: якщо просте число записане лише за допомогою одиниць, то сума його цифр – також просте число.

29. Натуральні числа a, b, c є такі, що $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2b+c}=\frac{1}{5b}$. Доведіть, що число $ac+1$ не ділиться на 3.

30. Яку максимальну кількість натуральних чисел від 1 до 50 можна вибрати так, щоб серед них не було двох чисел, одне з яких удвічі більше за друге?

31. Чи може квадратний тричлен ax^2+bx+c з цілими коефіцієнтами мати дискримінант, рівний 2003? Відповідь поясніть.

32. *Доведіть*, що ціла частина числа $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2, n \in N$ є числом непарним.

33. Знайдіть усі прості числа *n*, для яких число $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ є простим.

34. *Для* послідовності чисел (u_n): $u_1=1,\ u_k=u_{k-1}+k$. Знайдіть u_n+u_{n+1}.

35. Яке з чисел більше:

$$\frac{1985^{1986}+1}{1985^{1987}+1} \text{ чи } \frac{1985^{1984}+1}{1985^{1985}+1}?$$

36. Порівняйте числа:

$$\frac{2009^{2007}+1}{2009^{2008}+1} \text{ чи } \frac{2009^{2008}+1}{2009^{2009}+1}?$$

37. Доведіть нерівність:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geq 8, \text{ де } a>1, b>1.$$

38. Доведіть нерівність:

$$\frac{|a|}{\sqrt{b}}+\frac{|b|}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

39. Нехай α – дійсне число, відмінне від нуля. Відомо, що числа x_1 та x_2 – дійсні корені рівняння

$$x^2 + \alpha x - \frac{1}{2\alpha^2} = 0.$$

Доведіть, що $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

40. Доведіть, що за умови $a + b + c = 1$, де a, b, c – додатні дійсні числа, має місце нерівність:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

41. Доведіть нерівність:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{c+b}{c^2+b^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

a, b, c – додатні дійсні числа.

42. Доведіть, що для сторін a, b, c довільного трикутника виконується нерівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc).$$

43. Доведіть нерівність:

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ba} \geq a^2 + b^2 + c^2, a > 0, \;\; b > 0, \;\; c > 0.$$

44. Доведіть, що для $a > 0, \;\; b > 0, c > 0$ має місце нерівність:

$$\sqrt{a^2 + (b+c)^2} \leq \sqrt{x^2 + c^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}.$$

Для якого x досягається рівність?

45. Знайдіть найменше значення виразу:

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{y^2 + (x-2)^2}.$$

46. Доведіть, що якщо вираз $ax^2 + bx + c$ є четвертим степенем цілого числа *x*, то $a = b = c$.

47. З усіх квадратних тричленів $f(x)=ax^2+bx+c$ таких, що $f(1)=5$, $f(5)=1$ знайдіть той, для якого число $|a|+|b|+|c|$ – найменше.

48. Відомо, що функція $f(x)$ визначена для довільного x і задовольняє рівняння: $2f(x)+f(1-x)=x^2$. Знайдіть:

а) функцію $f(x)$, яка є квадратом двочлена;

б) усі такі функції.

49. Числа x_1 та x_2 є коренями рівняння $x^2+ax+bc=0$, а числа x_2 та x_3 – коренями рівняння $x^2+bx+ac=0$, причому $ac \neq bc$. Доведіть, що x_1 та x_3 –корені рівняння $x^2+cx+ab=0$.

50. При яких значеннях параметра a корені x_1 та x_2 рівняння $a^2x^2-ax-6=0$ задовольняють умову $|x_1| \le 1$, $|x_2| \le 1$?

51. Всередині гострокутного трикутника ABC відмітили точку H так, що $AB^2+HC^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Доведіть, що H – точка перетину висот трикутника ABC.

52. Два рівних квадрата утворюють при перетині восьмикутник. Дві діагоналі цього восьмикутника поділяють його на 4 чотирикутника. Доведіть, що ці діагоналі перпендикулярні одна до одної.

53. На колі зафіксовано дві точки, а третя рухається по цьому колу. Знайдіть геометричне місце точок перетину медіан трикутника, вершини якого розташовані у цих точках.

54. Довжини сторін трикутника рівні 10 см та 15 см. У яких межах може змінюватись довжина бісектриси кута між ними?

55. На яку найменшу кількість рівнобедрених трикутників можна розрізати трикутник з кутами 115^0, 60^0 та 105^0?

56. Сума квадратів усіх сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей. Доведіть, що цей чотирикутник – паралелограм.

57. В опуклому чотирикутнику $ABCD$: $\angle BAC=\angle DBC=30^0$, $\angle BCA=20^0$ і $\angle BDC=70^0$. Доведіть, що $ABCD$ – трапеція.

58. Три медіани одного трикутника рівні трьом медіанам іншого трикутника. Доведіть, що трикутники рівні.

59. Доведіть, що якщо у вписаний в коло чотирикутник можна вписати коло, то площа цього чотирикутника дорівнює кореню квадратному з добутку його сторін.

60. У трапеції $ABCD$ ($AD||BC$) проведені бісектриси зовнішніх кутів A і B до перетину в точці E і бісектриси зовнішніх кутів C і D до перетину в точці F. Відомо, що $EF=10$. Знайдіть периметр трапеції.

61. У трикутнику дві висоти не менші від сторін, на які вони опущені. Третя висота опущена на сторону, довжина якої 12 см. Доведіть, що даний трикутник не можна заповнити 30 монетами діаметром 1 см та, щоб вони дотикались і не виходили за межі трикутника.

62. Яку максимальну кількість попарно різних трикутників можна утворити, якщо вершини цих трикутників мають лежати у вершинах правильного 155-кутника?

63. У трикутнику ABC проведено висоти AF, BM і CK. Знайдіть градусну міру кута $\angle FMK$.

64. У трикутнику ABC $AB=BC$, $\angle ABC=100^0$. На стороні AC взяли точки K та M так, що $\angle KBA=\angle MBC= 30^0$. Бісектриса кута $\angle CAB$ перетинає відрізок BK у точці P. Знайдіть градусну міру кута $\angle KPM$.

65. У трикутнику ABC з кутом A, рівним 60^0, проведено висоти BH та CK. Доведіть, що $HK=\frac{BC}{2}$.

66. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює різниці радіусів описаного та вписаного кіл. Знайдіть градусну міру найбільшого кута трикутника.

67. У рівнобедреному трикутнику *ABC (AB=BC)* проведено бісектрису *AM*. На промені *CA* відкладено відрізок *CK*, рівний *BM*. Доведіть, що точки *A, B, M* і *K* лежать на одному колі.

68. У трикутнику ABC $AB = 5,\ BC = \sqrt{13},\ AC = 6$. На стороні *AC* вибрали точку *X* так, що *AX*=4. Знайдіть відстань між центрами кіл, описаних навколо трикутників *ABX* та *BCX*.

69. Усередині рівностороннього трикутника рухається точка. Доведіть, що сума відстаней від цієї точки до сторін трикутника є величина стала. Чи може вона дорівнювати 2011?

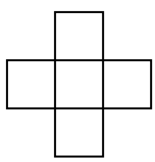
70. Слюсар та його учень, працюючи разом виконують певну роботу за 12 днів. За скільки годин зробить кожен цю роботу, працюючи окремо, якщо робочий день в обох складається з цілого числа годин, і в слюсаря він на 1 годину довший, ніж у учня?

71. Три цілих числа записали у ряд: a, b, c. Під цими числами написали нову трійку чисел: $a-b,\ b-c,\ c-a$.Числа третього рядка утворені з чисел попереднього (другого) за тим же правилом і т.д. Доведіть. Що серед чисел рядків, які розташовані нижче сьомого, не може зустрітись ні 1999, ні 2000.

72. Натуральні числа від 1 до 20 розбиваються на дві групи по 10 чисел у кожній. Відомо, що числа першої групи записані у порядку зростання: $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$, а числа другої групи йдуть у порядку спадання: $b_1 > b_2 > ... > b_{10}$. Для кожного такого розбиття знайдіть значення виразу

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{10} - b_{10}|.$$

73. Із паперу в клітинку вирізали квадрат 8×8. Яку найбільшу кількість фігур, зображених на малюнку, можна вирізати з цього квадрата.



74. Равлик повзе з точки А по площині, змінюючи напрямок руху на 90^0 через кожні 15 хвилин. Доведіть, що він може повернутись в точку А лише через цілу кількість годин (швидкість равлика вважати сталою).

75. На дошці записані числа від 1 до 93. Дозволяється замість двох чисел записувати їх суму на непарному кроці та модуль їх різниці на парному кроці. Яке найменше число може залишитись?

76. На олімпіаді було запропоновано 5 задач кожному учаснику. Десять учнів розв'язали 35 задач, причому Сашко розв'язав одну задачу, Борис – дві, Микола – три. Доведіть, що хоча б один з учасників олімпіади розв'язав усі 5 задач.

77. Кенгуру стрибає по куту $x \geq 0$, $y \geq 0$ площини Х)Н таким чином. З точки (x, y) кенгуру може стрибнути в точку з координатами $(x-5, y+7)$ або в точку з координатами $(x+1, y-1)$, причому скакати з точки, в якої одна координата від'ємна не дозволяється. Чи може кенгуру попасти в точку, яка знаходиться на відстані 1000 одиниць від початку координат? З яких початкових точок кенгуру не зможе попасти у цю точку? Нарисуйте множину цих точок на площині.

78. Серед заданих натуральних чисел 1, 2, 3, …$4n$-1 за один хід дозволяється замінити два будь-які числа їх різницею. Доведіть, що після $4n$-2 ходів залишиться одне парне число.

79. Чи можна розфарбувати деякі клітинки дошки 8×8 так, щоб у будь-якому квадраті 3×3 було рівно 5 зафарбованих клітинок, а у кожному прямокутнику 2×4 (вертикальному чи горизонтальному) – рівно 4 зафарбовані клітинки?

80. Є 5 предметів А, Б, В, Г, Д різної маси та терези без гир. Знайдіть найменшу кількість зважувань, необхідну для того, щоб розташувати ці предмети у порядку зростання їх маси.

81. Шість шахістів А, Б, В, Г, Д , Е зіграли у турнірі в один круг (кожен з кожним). При цьому виявилось, що А усі партії зіграв унічию, Б не програв жодної партії, В виграв у переможця турніру, Г випередив Д, але відстав від Е. Яку кількість очок набрав кожен з шахістів та хто виграв турнір?

82. По дорозі повз спостерігача проїхали з рівними проміжками часу автобус, мотоцикл та автомобіль. Повз другого спостерігача вони проїхали з тими ж проміжками часу, але в іншому порядку: автобус, автомобіль, мотоцикл. Знайдіть швидкість автобуса, якщо швидкість автомобіля 60 км/год., а мотоцикла – 30 км/год.

83. На площині розташовано шість точок таким чином, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Двоє по черзі з'єднують ці точки відрізками, кожен олівцем свого кольору. Повторно наводити уже проведений відрізок неможна. Програє той, хто першим одержить трикутник одного кольору з вершинами у заданих точках. Доведіть, що гра не може закінчитися внічию. У кого з двох гравців є виграшна стратегія? Опишіть її.

Завдання для 10 класу

1. Обчисліть значення виразу:

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+...+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+...+n\cdot 3n\cdot 9n}}$$ для n=2010.

2. Розкладіть на лінійні множники:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$

3. Знайдіть усі трійки дійсних чисел x, y, z, що задовольняють рівностям: $x+yz=y+zx=z+xy=6$.

4. Розв'яжіть рівняння

$$x_1^2+x_2^2+...+x_8^2+\frac{4}{9}-(x_1x_2+x_2x_3+...+x_7x_8+x_8)=0.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-1=0$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$x^2+4x\cdot\cos y+4=0.$$

7. Розв'яжіть рівняння:

$$2\sin x=5x^2+2x+3.$$

8. Розв'яжіть рівняння:

$$\cos 2x+4\sin^4 x=8\cos^6 x.$$

9. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2}{x}+\frac{x}{2}=[x],\quad x>0.$$

10. При якому дійсному значенні параметра a рівняння $|x-2|-|x+1|=a$ має хоча б один цілий розв'язок?

11. Доведіть, що рівняння

$$\sin x + \cos x = \frac{2(a^2 + b^2) - ab}{2ab},$$

де a і b – числа однакових знаків, не має розв'язку.

12. Нехай a, b, c – попарно різні додатні дійсні числа. Доведіть, що рівняння

$$(a + b + c)x^2 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

Має два різні дійсні корені.

13. Знайдіть усі значення параметра a, при яких наведена система рівнянь має рівно три розв'язки:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 - 14 \\ xyz = a \end{cases}$$

14. При яких значеннях параметра a вказана система рівнянь має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} |x + y + 2| + 2|x - y + 2| + |x - 3y + 5| = 3 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y = a^2 - 5 \end{cases}.$$

15. При яких значеннях параметра a вказане рівняння має єдиний розв'язок:

$$a^2 \cos \pi x - a\left(1 + 2x^2\right) - 6 = 0.$$

16. Розв'яжіть нерівність:

$$\sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) + \frac{x^2 + 1}{x}\cos\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \geq 0.$$

17. Розв'яжіть нерівність:

$$|\sin x| + |\cos x| < 1.$$

18. На координатній площині XOY побудуйте множину усіх точок M(x,y), координати яких задовольняють умову:

$$x^2 = y + \sqrt{x+y}.$$

19. Побудуйте графік рівняння

$$\sqrt{y+1} = \sqrt{|x|} - 1.$$

20. Знайдіть усі пари дійсних чисел (x,y), для кожної з яких виконується рівність:

$$\sqrt{3-2x-x^2}\sin^2(2x-y) + \cos(4x-2y) = 1 + \frac{\cos^2(4x-2y)}{2}.$$

21. Побудуйте графік функції:

$$y = f_{2002}(x), \text{ де } f_0(x) = x,\ f_{n+1}(x) = \left|f_n(x)\right| - 1, \text{ де } n \in N.$$

22. Побудуйте графік функції:

$$y = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2-1}}.$$

23. Знайдіть всі числові функції f такі, що для будь-якого $x \neq 0$ справедлива рівність $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$.

24. Розв'яжіть рівняння:

$$f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = x^2 + 2x, \quad x \neq 1.$$

25. Відомо, що $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Знайдіть $f_2(x) = f\left(f(x)\right)$, $f_3(x) = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$, $f_n(x) = \underbrace{f\left(f(\ldots f\left(f(x)\right)\right))}_{n}$, $f_{2000}(5)$, $f_{2005}(1)$, $f_{2009}(2007)$.

26. Відомо, що $f(x) = \frac{1}{2x-3}$, $g(f(x)) = x$. Знайдіть $g(x)$.

27. Для кожного натурального числа n розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \sin 3x \sin 9x + \ldots + \sin nx \sin n^2 x = 1.$$

28. Розв'яжіть систему у натуральних числах:

$$\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308, \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92 \end{cases}$$

29. Знайдіть усі натуральні числа k, такі що число $1^{2k} + 2^{2k} + ... + 2009^{2k}$ є точним квадратом.

30. У вершинах куба записані 8 невід'ємних чисел. Сума будь-яких двох з цих чисел не перевищує 2. Чи може значення суми будь-яких семи цих чисел дорівнювати 10?

31. Доведіть, що для всіх натуральних значень x та y, при яких $(4x + 7y)$ ділиться на 23, число

$$A = (3x + 11y)\left(\sqrt{9 + \sqrt{32}} - \sqrt[3]{22\sqrt{2} - 25}\right)$$

також ділиться на 23.

32. Чи існує нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3...$ така, що для будь-якого цілого невід'ємного числа k нескінченна послідовність $a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k...$ містить лише скінченну кількість простих чисел.

33. Для кожного натурального числа n позначимо $a(n) = n^2 + n + 1$. Через S позначимо множину всіх значень $a(n)$, $n \geq 1$.

а) Доведіть, що для кожного натурального n число $a(n)\ a(n+1)$ належить S .

б) Доведіть, що існують n і k, більші за 2001 такі, Що число $a(n)\ a(k)$ не належить S .

34. Барон Мюнхаузен стверджує, що побудував арифметичну прогресію $a_1, a_2, ..., a_{100}$ зі 100 членів таку, що

$$\frac{S(a_{n+1})}{S(a_n)} > 100, \; n = 1,2,...,9,$$

де $S(a_n)$ – сума цифр натурального числа a_n. Чи можна йому вірити?

35. Відомо, що (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть S_{3k-1}, якщо $a_k + a_{2k} = p$.

36. Дійсні невід'ємні числа $x_1, x_2, ..., x_n$ такі, що їх сума дорівнює 1. Знайдіть найбільше значення виразу

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + ... + x_{n-1} x_n.$$

37. Числа x_n задано рекурентно:

$$x_0 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{10 x_n}.$$

Знайдіть найбільше можливе значення, яке може набувати x_n при $n \geq 1$.

38. Натуральні числа, які мають непарну кількість дільників, пофарбували у жовтий колір, а натуральні числа, що мають парну кількість дільників – у блакитний. Чи існує нескінченна арифметична прогресія, яка містить лише числа одного кольору?

39. Доведіть, що існує число, в десятковому записі якого використовуються тільки цифри 1 і 0, і яке ділиться на 2001.

40. Знайдіть дві останні цифри числа $3^{4^{5^6}}$.

41. Доведіть, що для будь-якого x з проміжку $(0, \pi)$ виконується нерівність:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x > 0.$$

42. Доведіть, що для будь-якого дійсного числа x має місце нерівність:

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^{2003} x| \geq 501.$$

43. Доведіть, що для додатних чисел a, b, c, d виконується:

$$(a+c)(b+d) \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+b^2} + \sqrt{a^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}\ .$$

44. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b, c, d, e виконується нерівність:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq (a+b+c+d)e.$$

45. Відомо, що a, b, c – сторони трикутника. Доведіть, що

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ba} \geq a^2+b^2+c^2.$$

46. Доведіть, що нерівність

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{20-3a} \leq 12$$

виконується при всіх дійсних значеннях x, при яких визначена її ліва частина.

47. Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b, c виконується нерівність:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-cb+c^2} \geq \sqrt{a^2-ac+c^2}\ .$$

48. Доведіть, що для будь-якого a існує трикутник із сторонами $\sqrt{a^2-a+1}, \sqrt{a^2+a+1}, \sqrt{4a^2+3}$ і площа цього трикутника не залежить від a.

49. Знайдіть найбільше значення виразу:

$$\sqrt{4+2x} + \sqrt{3+3x} + \sqrt{2+4x} + \sqrt{1+5x} + \sqrt{7-x} + \sqrt{10-4x} + \sqrt{15-9x}\,.$$

50. Знайдіть найменше та найбільше значення виразу:

$$\cos A + \cos B + \cos C,$$

де A, B, C – кути трикутника.

51. Доведіть, що для будь-якого $n \in N$, $n > 1$ має місце нерівність:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

52. Доведіть, що за умови $a + b + c = k$ має місце нерівність

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le \sqrt{6k+9}.$$

53. Доведіть нерівність:

$$\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x \le \frac{3}{2}.$$

54. Порівняйте числа:

$$\sqrt{2009} + \sqrt{2011} \text{ та } 2\sqrt{2010}.$$

55. Про квадратний тричлен із старшим коефіцієнтом 1 відомо, що він має два цілі корені, і що його значення у точці 2000 дорівнює простому числу p. Знайдіть найбільше значення цього тричлена на відрізку $[1999; 2001]$.

56. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний в коло. Відомо, що промені AE і CD перетинаються в точці P, а промені ED і BC – в точці Q так, що $PQ \parallel AB$. Доведіть, що $DA = DB$.

57. Нехай O – центр кола, вписаного в довільний трикутник ABC, M – центр кола, описаного навколо трикутника AOC. Доведіть, що точки B, O, M лежать на одній прямій.

58. Непаралельні сторони трапеції продовжені до перетину і через одержану точку проведено пряму, паралельну основам трапеції. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, обмеженого продовженнями діагоналей, якщо довжини основ трапеції рівня a і b відповідно.

59. В паралелограмі $ABCD$ на сторонах AB, BC та CD та AD взято точки K, L, M, N відповідно. Відомо, що площа чотирикутника $KLMN$ у два рази менша за площу $ABCD$. Доведіть, що $KM \parallel AD$ або $LN \parallel AB$.

60. Через точку *A* проведено *n* променів під кутами $\frac{2\pi}{n}$. На одному з них, на відстані d від точки *A*, взято точку *B*, з неї опущено перпендикуляр на сусідній промінь і т.д. Знайдіть довжині цієї ламаної, що обертається навколо точки А, якщо *n* прямує до нескінченності.

61. Відомо, що у чотирикутнику суми синусів протилежних кутів рівні між собою. Доведіть, що цей чотирикутник є трапецією або паралелограмом.

62. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо відомо, що у ньому відношення катетів та бісектрис, проведених з гострих кутів, є раціональними числами.

63. У трикутнику побудовано чотири кола з однаковим радіусом *p* так, що одне з них дотикається до трьох інших, а кожне з цих трьох кіл дотикається до двох сторін трикутника. Знайдіть радіус *p*, якщо радіус вписаного у трикутник кола дорівнює r, а описаного – R.

64. На бісектрисі кута *BAC* взяли довільну точку *O*. Пряма *l*, що проходить через точку *O*, відтинає від кута відрізки *AM* та *AN*. Доведіть, що значення виразу $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ не залежить від положення прямої *l*.

65. Периметр чотирикутника дорівнює 8, а послідовні кути дорівнюють 90^0, 60^0, 90^0, 120^0.

66. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$ і *M* – точка перетину його діагоналей. Точка *K* є точкою перетину продовження променя *BA* з бісектрисою кута $\angle ACD$. Відомо, що $MB \cdot MD = MA \cdot (MC - CD)$. Доведіть, що $\angle BKC = \angle BDC$.

67. Точку O, яке лежить всередині правильного $2n$-кутника, з'єднано з його вершинами. Одержані трикутники розфарбовано через один червоним і синім кольорами. Доведіть, що сума площ червоних трикутників дорівнює сумі площ синіх.

68. Доведіть, що якщо у вписаний чотирикутник можна вписати коло, то $S=\sqrt{abcd}$, де a,b,c,d – довжини його сторін.

69. Маючи дві точки площини дозволяється побудувати третю, симетричну одній з даних відносно іншої. Чи можна, знаючи три вершини квадрата, побудувати четверту вершину за допомогою вказаного перетворення?

70. Доведіть, що для довільних точок A,B,C,D справедлива рівність:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

71. Три послідовні вершини ромба лежать відповідно на сторонах AB, BC, CD даного квадрата зі стороною 1. Знайдіть площу фігури, яку заповняють четверті вершини таких ромбів.

72. Сторони a,b,c трикутника задовольняють співвідношення:

$$a^{2010}+b^{2010}=c^{2010}.$$

Доведіть, що усі його кути гострі.

73. Доведіть, що будь-який трикутник можна розрізати на кілька рівнобедрених трикутників.

74. На дошці записано натуральні числа від 1 до k. Двоє учасників гри по черзі закреслюють два числа. Перший з них замінює два числа їх сумою, а другий – модулем їх різниці, до тих пір, поки на дошці залишиться одне число. Яке найменше ціле число може залишитись на дошці.

75. У країні n^2 міст, розташованих у вигляді квадрата $n \times n$, причому відстань між сусідніми містами дорівнює 10 км. Міста з'єднані системою доріг, що складається з прямолінійних ділянок паралельних сторонам квадрата. Яка найменша можлива довжина цієї системи доріг, якщо з довільного міста можна добратися до кожного іншого.

76. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір., а решту вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин (протилежним для чорного вважається білий колір, а для білого – чорний). Чи можливо за кілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

77. Замок має форму рівностороннього трикутника із стороною 100 м. Він розділений на 100 трикутних залів. Усі стіни залів мають однакову довжину 10 м. Посередині кожної стіни між залами зроблено двері. Яку найбільшу кількість залів може відвідати людина, якщо вона захоче пройти по замку, побувавши у кожному залі не більше одного разу.

78. На клітчастому папері зображено прямокутник, сторони якого йдуть по сторонах клітинок. Із цього прямокутника можна вирізати по сторонах клітинок 360 квадратів розміром 2×2. Доведіть, що з нього можна вирізати 200 прямокутників розміром 1×7.

79. Шахіст грає не менше однієї партії в день і не більше 12 партій щотижня. Доведіть, що протягом року знайдуться кілька днів підряд, у які він зіграв рівно 20 партій.

80. У кожній клітинці дошки 7×7 сидить жук. У деякий момент часу усі жуки переповзають на сусідні горизонтальні чи вертикальні клітинки. Доведіть, що принаймні одна клітинка виявиться порожньою.

81. Шхуна капітана Врунгеля «Перемога» мала 4-значний номер, який був точним квадратом натурального числа. Під час шторму першу цифру змило, і номер став точним кубом цілого числа. Після другого шторму зникла ще одна цифра, і номер став четвертим степенем деякого натурального числа. Який номер мала шхуна на початку?

82. У новосформованому 10 класі деякі учні виявилися уже знайомими між собою, а деякі ще ні. У перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну із незнайомих дівчат. Усього було кинуто 117 замріяних поглядів. Скільки у класі хлопців, і скільки дівчат, якщо усього у класі – не більше сорока учнів?

83. Курс акцій компанії «Робінзон і Ко» протягом місяця кожного дня о 12-00 змінюється на 13% і не заокруглюється. Чи може він двічі набути однакового значення?

Завдання для 11 класу

1. Обчисліть $a^4+b^4+c^4$, знаючи, що

$$a+b+c=0,\quad a^2+b^2+c^2=1.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$tg^4x+tg^4y+2ctg^2x\cdot ctg^2y=3+\sin^2(x+y).$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\sqrt{y^2-7+\sqrt{x+y^2-7}}=x\\ \sqrt{x^2+2+\sqrt{y+x^2+2}}=y\end{cases}.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{10}\right)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^6\right)^2.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$x^2\sqrt{1-x^2}=|x|^3-|x|+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-1=0.$$

7. Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases}\left|x^4-17x^2\right|\neq x^4-17x^2\\ \left|x^2-18x-50\right|+x^2-8x-50=0\end{cases}.$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}xy^2=15x^2+17xy+15y^2,\\ x^2y=20x^2+3y^2\end{cases}$$

9. При якому значенні параметра *k* наступна система має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} 5x+2y=k \\ x^2+y^2=116 \end{cases}?$$

10. Розв'яжіть рівняння:

$$\lfloor x^{2011}\rfloor+\lfloor x^{2010}\rfloor+\ldots+\lfloor x^2\rfloor+[x]=\{x\}-1,$$

де $[x]$ та $\{x\}$ – ціла та дробова частини числа x відповідно.

11. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x^2+2x+1}+|x-2009|+y^{2010}=2010.$$

12. Розв'яжіть рівняння:

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\ddots\cfrac{}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}}=1$$

(У виразі зліва записано 2006 двійок).

13. Для кожного натурального числа n розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 x+\sin 2x\sin 4x+\sin 3x\sin 9x+\ldots+\sin nx\sin n^2x=1.$$

14. Скільки коренів має рівняння:

$$|\cos\pi x|=\frac{x^2}{4n^2},$$

де n – ціле число.

15. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 4x+(a^2-3)\sin 4x+a^2-4=0$$

має рівно чотири корені на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$?

16. Скільки коренів має рівняння:

$$16\cdot 2^{-|x|}\sin\pi x=1?$$

17. Розв′яжіть рівняння:

$$\sin x+\sin y+\sin z=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2 y}+\frac{1}{\sin^2 z}.$$

18. Скільки дійсних коренів має рівняння:

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0,$$

якщо a,b,c – різні дійсні числа?

19. Розв′яжіть нерівність:

$$3^x+4^x+5^x<3.$$

20. Коефіцієнти p і q квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ збільшили на 1 і помітили, що корені обох рівнянь є цілими числами. Наведіть приклади. Операцію повторили k разів. При яких k одержані рівняння матимуть цілі корені?

21. Побудуйте графік функції:

$$y=\sqrt{\log_{2009}\sin^{2008} x}.$$

22. Побудуйте графік функції:

$$y=arctgx+arctg\frac{1-x}{1+x}.$$

23. Побудуйте графік функції:

$$y=\frac{1}{\cos x}+tgx.$$

24. Побудуйте множину точок площини, координати яких задовольняють рівність:

$$y=\left|\frac{\{x\}-1}{\{x\}+1}\right|.$$

25. Побудуйте на координатній площині множину точок, для яких $2y-1-|y-3|+|x+1|=0$. Доведіть, що ця множина є графіком деякої функції $y=f(x)$. При якому значенні параметра a функція $y=f(x+a)$ буде парною?

26. Запишіть рівняння прямої, яка дотикається до графіка функції $y = \left| x^3 - x \right| - 5x + 3$ рівно у двох точках.

27. Знайдіть усі натуральні числа *n*, для яких число 3π є періодом функції $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{2009x}{n^2}$.

28. Функція $f(n)$ визначена на множині натуральних чисел і задовольняє умови:

$$f(n) = f(n-1) + a^n,\ f(1) = 1.$$

Знайдіть $f(n)$.

29. Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і приймає значення на цій множині. Відомо, що для довільного числа *n* з цієї множини має місце рівність

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3.$$

Знайдіть $f(2008)$.

30. Знайдіть $f(x)$ таку, що для довільного $x \in R$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) - 5f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 12x + 6.$$

31. Знайдіть усі функції $f : R \setminus \{-1,0,1\} \to R$, що задовольняють рівність: $xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$.

32. Чи існує така визначена на множині дійсних чисел числова функція, що для будь-яких $x, y \in R$ виконується рівність:

$$f(x^2 y + f(x + y^2)) = x^3 + y^3 + f(xy)?$$

33. Побудувати неперервну на відрізку $[0;1]$ функцію f та дві множини *A*,*B* такі, що $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = [0;1]$, які задовольняють умови: якщо $x \in A$, то $f(x) \in B$ і навпаки, якщо $x \in B$, то $f(x) \in A$.

34. Чи існує функція f, яка визначена на всій множині дійсних чисел, має похідну у всіх точках та задовольняє наступні дві умови:

а) при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x) \geq f(x+\sin x)$;

б) рівняння $f'(x)=0$ має скінченне число коренів?

35. Знайдіть усі функції f, які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x)=0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x, y \in R$ виконується рівність

$$f(y+f(x)) = f(x^2-y)+4f(x)y.$$

36. Про функцію f, яка визначена на множині натуральних чисел і приймає натуральні значення ($f: N \to N$) відомо, що

$$f(f(n))+f(m) = m+n, \quad n, m \in N.$$

При якому значенні *n* виконується рівність:

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2007) = 2007n?$$

37. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, для яких при будь-яких дійсних *x* та *y* виконується рівність:

$$f(x-f(y)) = 1-x-y.$$

38. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, що для будь-яких дійсних *x* та *y* задовольняють рівняння

$$xf(y)+yf(x) = (x+y)f(x)f(y).$$

39. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, що для будь-яких дійсних *x* та *y* виконується рівність:

$$f(x^2-f^2(y)) = xf(x)-y^2.$$

40. Знайдіть усі значення a, для кожного з яких послідовність:

$$\cos a,\ \ \cos 2a,\ \ \cos 4a, ..., \cos 2^n a\,,\ n \in N$$

складатиметься лише з від'ємних чисел.

41. Знайдіть усі натуральні значення n, для яких виконується рівність:

$$\left(S(n)+2009\right)^{2008} = n^{2009}\,,$$

де $S(n)$ – сума цифр числа n.

42. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 19901991\,.$$

43. Чи можна число 2010 подати у вигляді $\dfrac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$, де a, b, c, d – натуральні числа?

44. Натуральне число n назвемо «дивним», якщо воно кратне 4, має парну кількість натуральних дільників, причому у зростаючій послідовності цих дільників $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{2k} = n$ кожен наступний дільник з парним номером ділиться на попередній, тобто $d_{2m} \vdots d_{2m-1}$. Знайдіть усі «дивні» натуральні числа від 1 до 500.

45. У вершинах куба записані 8 невід'ємних чисел. Сума будь-яких двох з них не перевищує 2. Знайдіть найбільше можливе значення суми будь-яких семи цих чисел.

46. Числова послідовність $a_1, a_2, a_3, ...$, в якій $a_1 = 2, a_2 = 500$ та $a_3 = 2000$, при всіх натуральних $n \geq 2$ задовольняє умову:

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\,.$$

Доведіть, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому a_{2001} ділиться без остачі на 2^{2001}.

47. У шестизначному числі, що ділиться на одне з чисел: 7, 11, 13, 37 переставили першу й останню цифри. Доведіть, що отримане число матиме той же дільник, що й дане (7, 11, 13 або 37).

48. Числа $x_1, x_2, ..., x_{2002}$ додатні, а їх добуток дорівнює 1. Доведіть, що

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{2002}) \geq 2^{2002}$$

49. Знайдіть найменше та найбільше значення функції

$$f(x,y) = 6\sin x \cos y + 2\sin x \sin y + 3\cos x .$$

50. Доведіть, що для всіх цілих n, $n > 1$ число $\dfrac{3^n - 2^n}{n}$ не є цілим.

51. Доведіть, що для будь-якого натурального n, $n > 1$ має місце нерівність:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}} .$$

52. Доведіть нерівність:

$$\frac{x}{x^2+1^2} + \frac{x}{x^2+2^2} + ... + \frac{x}{x^2+n^2} < \frac{\pi}{2}, \quad x > 0, \quad n \in N.$$

53. Доведіть, що для будь-якого дійсного числа x має місце нерівність:

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + ... + |\cos 2^{1991} x| \geq 498 .$$

54. Нехай α та β – гострі кути, $\alpha, \beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, для яких виконується рівність $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$. Доведіть, що $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

55. Для додатних чисел x, y, z виконується нерівність

$$arctgx + arctgy + arctgz < \pi .$$

Доведіть, що за цієї умови $x + y + z > xyz$.

56. Числа $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і задовольняють умовам: $\cos a = a$, $\sin\cos b = b$, $\cos\sin c = c$. Розмістіть числа a, b, c в порядку зростання.

57. Доведіть, що для усіх значень x та y, для яких визначена ліва частина, має місце нерівність

$$\sqrt{5 - x - 2y} + \sqrt{x + 3} + \sqrt{y + 1} \le 5$$

При яких значеннях x та y досягається рівність?

58. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло, $AC \parallel DE$, M – середина діагоналі BD і $\angle AMB = \angle BMC$. Доведіть, що пряма BE ділить діагональ AC навпіл.

59. Знайдіть двогранні кути тригранного кута, плоскі кути якого α, β, γ.

60. Основа піраміди – паралелограм, сторони якого 16 і 22. Відстань від вершини піраміди до точки перетину діагоналей основи дорівнює 4. Знайдіть довжини бічних ребер піраміди, знаючи, що вони вимірюються цілими числами, які утворюють арифметичну прогресію.

61. Поза площиною α дано точку A. Доведіть, що для будь-якої прямої $l \in \alpha$, у площині α знайдеться відмінна від l пряма $m \parallel l$, що для кожної точки $M \in m$ спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l та AM проходитиме через середину відрізка AM.

62. Нехай точка P знаходиться всередині гострокутного трикутника ABC. На сторонах AC і BC цього трикутника відмітили точки M і K відповідно, так, що $\angle PMC = \angle PKC = 90^0$. Доведіть, що якщо точки M та K рівновіддалені від середини сторони AB, то $\angle PBC = \angle PAC$.

63. Гострокутний трикутник ABC з $\angle ABC = 60^0$ вписано в коло. Нехай AD і CP – його висоти, H – точка перетину AD і CP, N – точка перетину прямої CP з колом ($N \neq C$). З точки C на пряму AN опущено перпендикуляр (точка K – його основа, M – точка його перетину з прямою AB). Доведіть, що $S_{HPBD} = S_{AKM} + S_{AHC}$.

64. Кожна з дев'яти прямих розбиває квадрат на два чотирикутника, площі яких відносяться як 2:3. Доведіть, що принаймні три з цих дев'яти прямих проходять через одну точку.

65. У трикутнику ABC одиничної площі $BC= a$, $AC= b$, проведено бісектриси BN кута ABC ($N \in AC$) і AM кута BAN ($M \in BN$). Знайдіть площу трикутника AMN.

66. На основі AD трапеції $ABCD$ взято точку E так, що периметри трикутників ABE, BCE та CDE рівні. Доведіть, що $BC = \frac{1}{2}AD$.

67. Опуклий чотирикутник $ABCD$ розділений своїми діагоналями на чотири трикутники. Доведіть, що $ABCD$ – ромб, якщо радіуси усіх чотирьох кіл, вписаних у ці трикутники, рівні між собою.

68. На стороні AC трикутника ABC взято точку K так, що $AK=2KC$ і $\angle ABK=2\angle KBC$. Точка P – основа перпендикуляра, проведеного з точки A до BK, а M – основа перпендикуляра, проведеного з точки P до BC. Доведіть, що пряма PM ділить AC навпіл.

69. У паралелограмі $ABCD$, AB=1 см, на стороні AD взято точку K так, що $KD = 1$ см, $\angle ABK = 90^0$, $\angle DBK = 30^0$. Знайдіть довжину сторони AD.

70. Доведіть, що коли довжини a, b, c сторін трикутника задовольняють співвідношення:

$$a^{2006} + b^{2006} = c^{2006},$$

то трикутник гострокутний.

71. Границею лісу є пряма l. На перпендикуляри AC до прямої l в точках A та B ($C \in l,\ \ AB = BC = a$) знаходяться заєць і вовк відповідно. Обидва біжать зі сталими швидкостями, причому швидкість зайця удвічі більша за швидкість вовка. Заєць буде схоплений вовком у деякій точці, якщо у цю точку вовк зможе прибігти або раніше зайця, або одночасно з ним. Заєць вибирає на l точку M і біжить у ліс по відрізку *AM*. Як слід вибрати точку *M*, щоб вовк не зміг схопити зайця на відрізку *AM*?

72. Сторона правильної піраміди дорівнює *a*, бічне ребро – b, причому $b > \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Жук повзе по поверхні піраміди з точки *A* перетину бічного ребра з основою піраміди. Побувавши на всіх бічних гранях, жук повертається в точку *A*. Якою є довжина найкоротшого шляху?

73. Два кола, що дотикаються зовні між собою, мають радіуси r і $3r$ і дотикаються до деякої прямої в точка *A* і *B*. Ці точки одночасно починають рухатись за годинниковою стрілкою кожна по своєму колу зі швидкостями, що відносяться як 22 до 21 відповідно. Доведіть, що точки *A* і *B* «зустрінуться». Скільки повних обертів зробить до «зустрічі» точка *A*?

74. Площа трикутника, вершинами якого є основи висот деякого гострокутного трикутника *ABC* у чотири рази більша, ніж площа трикутника *ABC*. Доведіть, що трикутник *ABC* рівносторонній.

75. Задано каркас $n \times n$ із дроту (рис.1). При яких натуральних значеннях *n* його можна розрізати на цілу кількість фігурок типу «Т» (рис.2), у яких довжина *AB*=2, а *CE*=1.

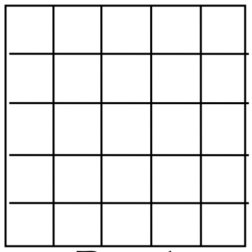


Рис.1

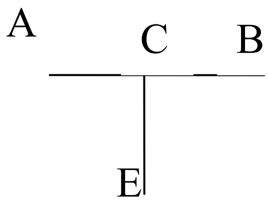
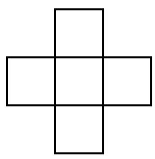


Рис.2

76. Є 2000 монет, серед яких 2 фальшиві: одна легша за справжню, а друга – важча. Як не більш, ніж за 4 зважування на шалькових терезах без гир встановити, що більше: сумарна вага двох фальшивих монет, чи сумарна вага двох справжніх монет, або ж вони рівні.

77. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір., а решту вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин (протилежним для чорного вважається білий колір, а для білого – чорний). Чи можливо за кілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

78. Чи можна шахівницю розміру 7×7, з якої вилучено чотири кутові клітинки, так заповнити цілими числами (у кожну клітинку записується одне ціле число), сума яких дорівнюватиме 199919991999, щоб у будь-якій 5-клітинковій фігурці вигляду, який зображено на рисунку, сума чисел була від'ємною?



79. У кубі з ребром 11 см розмістили 19 синіх і 97 жовтих кульок різних радіусів. Доведіть, що всередині цього куба завжди можна вказати дві точки на відстані 11 см одна від одної, що обидві вони одного кольору, або обидві не належать жодній з кульок.

80. 13 лицарів з k різних кланів $(1<k<13)$ сидять за круглим столом. Кожен з них тримає золотий або срібний кубок, причому золотих кубків рівно k штук. Король Артур наказав усім лицарям передати кубки своїм сусідам справа, потім зробити те саме ще раз і так далі. Доведіть, що у деякий момент часу знайдуться два лицарі з одного клану, які триматимуть золоті кубки.

81. На поверхні сфери задано деяку карту: межі країн утворені дугами n кіл, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці. Доведіть, що неможливо відвідати кожну країну один і тільки один раз, не проходячи через ті точки границь країн, де сходяться більше двох країн, якщо n кратне 4.

82. На клітчастому папері зображено прямокутник, сторони якого йдуть по сторонах клітинок. Із цього прямокутника можна вирізати по сторонах клітинок 360 квадратів розміром 2×2. Доведіть, що з нього можна вирізати 200 прямокутників розміром 1×7.

83. Доведіть, що куб розмірами 6×6×6 неможливо скласти з прямокутних паралелепіпедів розмірами 1×1×4. Яка максимальна кількість таких паралелепіпедів може повністю вміститись у кубі?

Список рекомендованої літератури

1. Васильєв Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзніх математических олимпиад. – М.: Наука. – 1988. – 288 с.
2. Генкін С.А., Ітенбегр І.В., Фомін Д.В. Ленінградські математичні гуртки. – К.: ТВіМС, 1997. – 272 с.
3. Лейфура В.М. Математичні задачі евристичного характеру. – К.: Вища школа, 1992. – 128 с.
4. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.
5. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Методичний посібник. – Житомир, ЖДПУ, 2002. – 238 с.
6. Теплінський Ю.В., Конет І.М. та ін. Роз’язування олімпіад них задач з математики. Ч. 1 – Хмельницький:ОУВ, 1991. – 124 с.
7. Теплінський Ю.В., Конет І.М. та ін. Роз’язування олімпіад них задач з математики. Ч. 2 – Хмельницький:ОУВ, 1993. – 95 с.
8. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики (і не тільки їх): Посібник для підготовки до математичних олімпіад – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
9. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Вінниця, 1998. – 226 с.

Навчальне видання

Збірник завдань обласних учнівських олімпіад з математики

Укладачі: Синько Людмила Степанівна
Лукашова Тетяна Дмитрівна

Відповідальний за випуск **Сбруєва А.А.**
Комп'ютерний набір та верстка **Бойко О.М.**

Здано в набір 02.01.12. Підписано до друку 05.01.12.
Формат 60×84/16. Гарн. Palatino Linotype. Друк ризогр. Папір друк.
Умовн. друк. арк. 2,32. Обл.- вид. арк. 1,72. Тираж 100 прим. Вид. №

СумДПУ ім. А.С. Макаренка
40002, м. Суми, вул. Роменська, 87

Виготовлено на обладнанні СумДПУ ім. А.С. Макаренка. Зам. №